Devoir Maison

Pour le 3 janvier 2023

Exercice 1
(Banque PT, Maths C 2017)

Soit F la fonction qui, à tout réel positif x, associe : $\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. En appliquant des théorèmes de cours uniquement, et en évitant des calculs trop compliqués, montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction F est solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :
$$y'(x) = -2\,x\,y(x) + 1 \qquad (\mathcal{E})$$
4. En recherchant le développement en série entière de F sous la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donner une relation de récurrence vérifiée par les a_n, $n \geqslant 0$.
5. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.
6. En déduire le développement en série entière de F.
7. étudier la convergence de la série de terme général
$$\frac{(-1)^n\,4^n n!}{(2n+1)!}$$
8. Donner le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x, associe $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ puis déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Exercice 2
(EML 2018)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :
$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$$

1. (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Calculer $\varphi(X^n)$.
   (c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
3. (a) L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.
   (b) Soit P un polynôme non nul de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   Montrer que P admet 1 comme unique racine (dans $\mathbb{C}$), et que P est de degré n.
   (c) En déduire une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. Montrer que φ est diagonalisable.
5. On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
   (a) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.
   (b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.
   (c) Déterminer les sous-espaces propres de φ.

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

On pose $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u$ et $F : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} H(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. D'après le théorème fondamental de l'intégration, vu que l'application $h : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{t^2} \end{array}$ est continue, la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Le produit de deux fonctions dérivables sur le même intervalle étant dérivable, la fonction $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.
2. Nous savons que
$$\forall z \in \mathbb{R},\ e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$
ce qui donne
$$\forall u \in \mathbb{R},\ e^{u^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^{2k}}{k!}$$
Ainsi la fonction $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \mathrm{e}^{u^2} \end{array}$ est développable en série entière et le rayon de convergence de son développement est $+\infty$.
D'après le théorème d'intégration terme à terme, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$
La fonction H est donc développable en série entière et le rayon de convergence associé vaut $+\infty$. Enfin le produit de deux fonctions développables en série entière en 0 ayant des rayons de convergence infinis reste une fonction développable en série entière en 0 avec un rayon de convergence infini par produit de Cauchy pour les séries entières.
On en conclut que $\boxed{\text{la fonction } F \text{ est développable en série entière en } 0}$ et le rayon de convergence de sa série entière vaut $+\infty$.
3. Les fonctions en jeu étant dérivables sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F'(x) = -2xe^{-x^2}H(x) + e^{-x^2}H'(x) = -2x\underbrace{e^{-x^2}H(x)}_{F(x)} + 1$$
$\boxed{F \text{ est donc bien solution de } (\mathcal{E}).}$
4. Nous savons que la fonction F est une fonction impaire, développable en série entière en 0 et que le rayon de sa série de Taylor est infini. On peut donc trouver un développement en série entière de F en 0 de la forme :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$$
Par application du théorème de dérivation terme à terme, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)a_{2k+1}x^{2k}$$
En injectant ces développements dans l'équation différentielle $y'(x) = -2xy(x)+1$, on obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)a_{2k+1}x^{2k} = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} -2a_{2k+1}x^{2k+2}$$

D'où par changement d'indice

$$\forall x \ \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)a_{2k+1}x^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} -2a_{2k-1}x^{2k}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que $a_1 = 1$ et

$$\forall k \geqslant 1,\ a_{2k+1} = \frac{-2}{2k+1}a_{2k-1}$$

Ainsi, pour $n \geqslant 0$ on a

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \frac{(-2)^n}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)} \\ &= \frac{(-2)^n \prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=0}^{2n+1} k} \\ &= \frac{(-2)^n 2^n \prod_{k=1}^{n} k}{(2n+1)!} \\ &= \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

5. Le rayon de convergence du développement en série entière de F est infini. La série entière associée à F est donc convergente en $x = 1$. Nous déduisons que $\boxed{\text{la série proposée est convergente}}$.
6. On a, par primitivation terme à terme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\, du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$$

D'où, par produit de Cauchy (pour les séries), pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ où

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!} \frac{(-1)^{n-k} x^{2n-2k}}{(n-k)!} \\ &= x^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)k!(n-k)!} \\ &= (-1)^n x^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \frac{\binom{n}{k}}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Produit de Cauchy

Les deux séries entières en jeu étant lacunaires, il sera plus facile d'utiliser le produit de Cauchy de deux séries absolument convergente plutôt que la formule pour le produit de Cauchy de deux séries entières

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \binom{n}{k} \right)$$

Par unicité du développement en série entière en 0, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \binom{n}{k} \right)$$

D'où, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}\binom{n}{k} &= \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}\\ &= \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!(2n+1)}\\ &= \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}}$$

Corrigé de l'exercice 2

1. (a) Soit $P, Q \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha P + Q) &= \frac{1}{n}X(1-X)(\alpha P + Q)' + X(\alpha P + Q)\\ &= \alpha\left(\frac{1}{n}X(1-X)P' + XP\right) + \left(\frac{1}{n}X(1-X)Q' + XQ\right)\\ &= \alpha\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est une application linéaire}}$

(b)

$$\boxed{\varphi(X^n) = \frac{1}{n}X(1-X)nX^{n-1} + X \cdot X^n = X^n}$$

(c) on constate que, si $\deg Q \leqslant n-1$ alors $\deg\left(\frac{1}{n}X(1-X)Q' + XQ\right) \leqslant n$

Soit $P \in E$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P = \alpha X^n + Q$

Alors $\varphi(P) = \alpha\varphi(X^n) + \varphi(Q)$ donc $\deg(\varphi(P)) \leqslant n$ et ainsi $\varphi(P) \in E$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$

2. Pour $1 \leqslant k < n$: on a

$$\begin{aligned}\varphi\left(X^k\right) &= \frac{1}{n}X(1-X)kX^{k-1} + XX^k\\ &= \frac{k}{n}X^k + \frac{n-k}{n}X^{k+1}\end{aligned}$$

et $\varphi(1) = X$ donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ 1 & \frac{1}{n} & \ddots & & & \vdots\\ 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots\\ \vdots & 0 & \frac{n-2}{n} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & \frac{n}{n} \end{pmatrix}$$

A est une matrice échelonnée donc son rang est le nombre de pivots non-nuls

$\boxed{\mathrm{Rang}(A) = n}$

3. (a) Comme $\mathrm{Rang}(A) = n$, $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = 1$ d'après le théorème du rang.

Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$

$\boxed{\varphi \text{ n'est donc pas injectif}}$

(b) Soit P un polynôme non nul de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
On a alors $\varphi(P) = \dfrac{1}{n}X(1-X)P' + XP = X\left[\dfrac{1}{n}(1-X)P' + P\right] = 0$
Donc $\dfrac{1}{n}(1-X)P' + P = 0$
En particulier, en 1

$$\varphi(P)(1) = \frac{1}{n}(1-1)P'(1) + P(1) = P(1) = 0$$

Ainsi 1 est racine de P
Si $\alpha \neq 1$ est racine de P alors

$$0 = \frac{1}{n}(1-\alpha)P'(\alpha) + P(\alpha) = \frac{1}{n}(1-\alpha)P'(\alpha)$$

donc $P'(\alpha) = 0$
Donc α est racine de multiplicité 2 de P donc de P'.
Et ainsi, par une récurrence simple, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, α sera racine d'ordre k de P
On en déduit que P est le polynôme nul (dans un polynôme non-nul le nombre de racines comptées avec multiplicité est inférieur ou égal au degré), ce qui est absurde.
$\boxed{\text{Donc 1 est la seule racine de } P}$
Si $\deg(P) = m < n$ alors il existe Q de degré strictement inférieur à m et $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$ tel que $P = \alpha X^m + Q$ et $\varphi(P) = \alpha\varphi(X^m) + \varphi(Q)$
Et comme $\deg(\varphi(X^m)) = m + 1 > \deg(\varphi(Q))$ alors $\deg(\varphi(P)) = m + 1$ et $\varphi(P) \neq 0$
$\boxed{\text{Donc } \deg(P) = n}$
Ce polynôme n'a que 1 comme racine. Sa décomposition en facteurs irréductible est donc de la forme $\alpha(X-1)^k$
Et comme il est de degré , c'est $\alpha(X-1)^n$.
Rédaction beaucoup plus rapide : Si on a déjà une idée de ce qu'est une base du noyau (idée qui n'est amenée qu'à la question suivante)
$\varphi((X-1)^n) = \dfrac{1}{n}X(1-X)n(X-1)^{n-1} + X(X-1)^n = 0$
Donc $(X-1)^n$ est une famille libre de 1 vecteur de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\dim \mathrm{Ker}(f) = 1$ donc $((X-1)^n)$ est une base du noyau.
Donc, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\alpha(X-1)^n \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ et les polynômes du noyau sont des polynômes de degré n qui ont 1 pour seule racine.

4. A est triangulaire. Ses valeurs propres sont donc sur la diagonale.
Ainsi φ a $n+1$ valeurs propres distinctes. Et donc $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$.

5. On pose, pour tout k de $[\![0,n]\!]$, $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

⚠Attention
Les polynômes P_k sont tous de degré n, ils ne sont pas échelonnés en degrés

(a) On se doute que P_k va être vecteur propre. On cherche donc à faire réapparaître une forme factorisée
Pour tout k de $[[1, n-1]]$, $P_k' = kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}$ Ainsi

$$\begin{aligned}\varphi(P_k) &= \frac{1}{n}X(1-X)\left[kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\right] + XX^k(1-X)^{n-k}\\ &= X^k(1-X)^{n-k}\left[\frac{k}{n}(1-X) - \frac{n-k}{n}X + X\right]\\ &= \frac{k}{n}P_k\end{aligned}$$

Pour $k = 0$ et $k = n$ on a encore $\varphi(P_k) = \dfrac{k}{n}P_k$
Donc $P_k \neq 0$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\dfrac{k}{n}$

Les valeurs propres étant deux à deux distinctes, la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre .
C'est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$
Donc $\boxed{(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est une base de } E}$

et la matrice de φ dans cette base est $\begin{pmatrix} \frac{0}{n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n}{n} \end{pmatrix}$

Cours

Une famille de vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre

(b) On a ici $n+1$ valeurs propres distinctes pour un endomorphisme d'un espace de dimension $n+1$. Ce sont donc les seules valeurs propres et les espaces propres associés sont tous de dimension 1. Ainsi
$\boxed{\text{Les sous espaces propres de } \varphi \text{ sont donc les } \mathrm{Vect}(P_k) \text{ pour } k \in [\![0, n]\!]}$